

Methoden der Signalverarbeitung

Prof. Dr.-Ing. F. Puente

Organisatorisches

Termine

- Mi. 11:30-13:00 EAS* (Vorlesung, **wöchentlich**)
- Do. 11:30-13:00 HS II, 30.41 (Übung, 8 Termine; Beginn: 22.10.15)
*) am 18.11.15 HS AOC 101, Geb. 30.45

Modulunterlagen

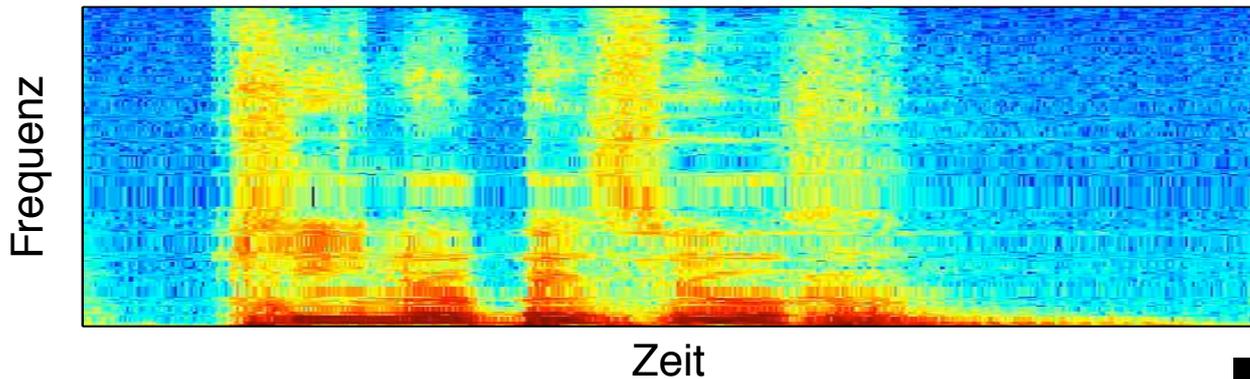
- [PJ15]: Puente León, Jäkel: **Signale und Systeme**, 6. Aufl., De Gruyter, Berlin, 2015 (Kapitel 7–9); E-Book im KIT-Intranet kostenlos verfügbar
- [KSW08]: Kiencke, Schwarz, Weickert: **Signalverarbeitung**, Oldenbourg, München, 2008
- **Vorlesungsfolien** (Zugangsdaten: `msvhoerer` / `wavelet09`)
- **Übungsblätter** sowie **Zusammenfassung** des Vorlesungsstoffes
- Weitere Informationen unter www.iit.kit.edu/msv.php erhältlich

Feedback, Fragen

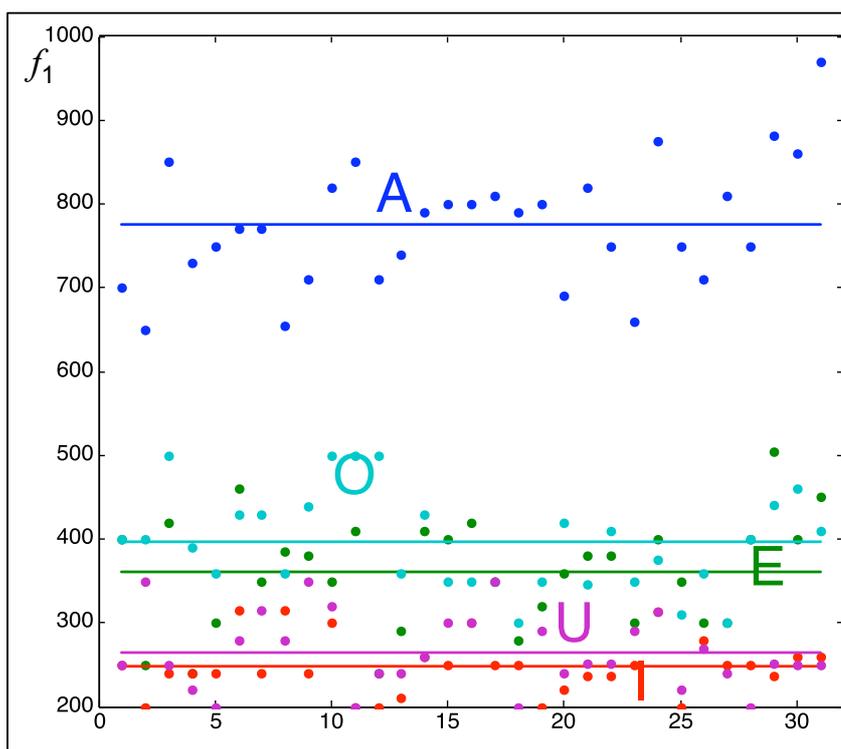
- während oder nach der Vorlesung
- Übungsleiterin: Dipl.-Ing. P. Hernández (pilar.mesa@kit.edu)

- Bisher **Fourier-Transformation** zur Signalanalyse (Vorlesung „Signale und Systeme“)
- Nachteil: keine Information, zu welchen Zeitpunkten bestimmte Spektralanteile auftauchen → Probleme bei instationären Signalen
- Wunsch: gleichzeitige Darstellung eines Signals in Zeit und Frequenz

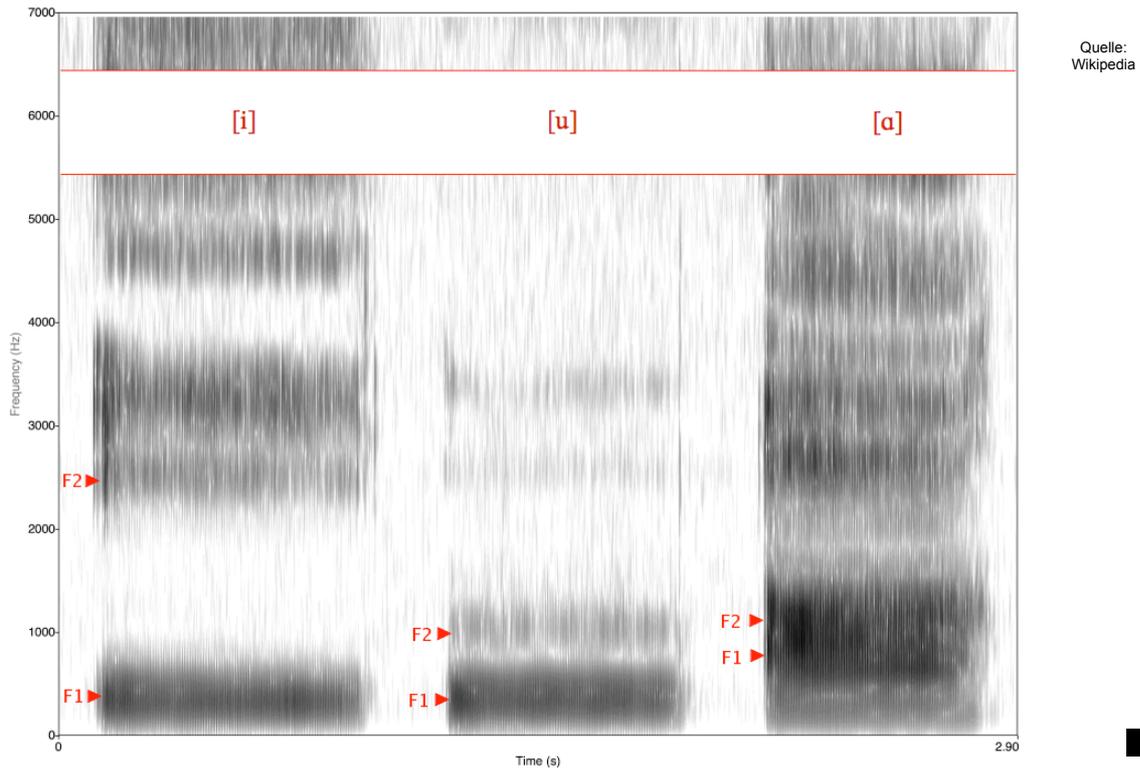
Beispiel: Kurzzeit-Fourier-Transformation eines instationären Signals



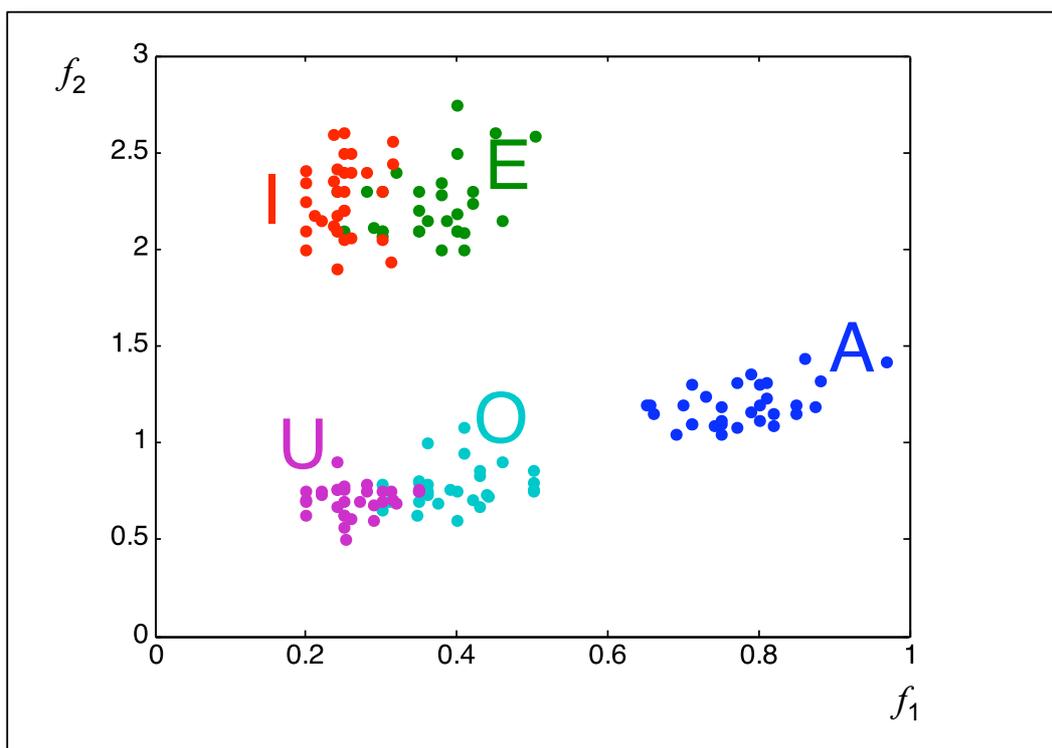
Beispiel: Klassifikation von Vokalen anhand des ersten Formanten



Spektrogramm englischer Vokale mit Frequenzen der ersten 2 Formanten



Beispiel: Klassifikation von Vokalen anhand der ersten beiden Formanten



1. Teil: Verfahren zur Zeit-Frequenz-Analyse und Eigenwertverfahren

- **Kurzzeit-Fourier-Transformation** (Kap. 2)
- **Wavelet-Transformation** und **Wavelet-Reihen** (Kap. 3 und 4)
- **Wigner-Ville-Verteilung** (Kap. 5)
- **Karhunen-Loève-** und **Cosinus-Transformation** (Kap. 6)
- Anwendungen: Gesichtserkennung, Bildkompression (JPEG), Sprachverarbeitung, Ultraschallmessung, EKG-Signalanalyse etc.

2. Teil: Schätzverfahren

- Schätzung von Parametern eines Signals oder Systems (Kap. 7 und 8)
- Anwendungen: Signale aus verrauschten Messungen schätzen, Systemidentifikation...
- Zustandsschätzung: Schätzung eines veränderlichen Systemzustands durch modellgestützte Messung (**Kalman-Filter**) (Kap. 9)
- Anwendungen: Schätzung der Kraftfahrzeug-Dynamik (ESP, Fahrerassistenzsysteme), Luft- und Raumfahrt (z. B. Navigationssysteme)

1. Signaldarstellung mit Frames

Wiederholung

- Signale können mathematisch als Funktionen (meist der Zeit) dargestellt werden
- Mehrere Funktionen spannen einen Vektorraum auf

Beispiel

- Die Funktionen $x_1(t) = t$ und $x_2(t) = t^2$ spannen den Raum aller Funktionen $x(t)$ auf, die sich durch $x(t) = a_1 x_1(t) + a_2 x_2(t)$ darstellen lassen
 - Die Funktionen $x_1(t)$ und $x_2(t)$ werden Basisfunktionen genannt
 - In dieser Basis wird das Signal $x(t)$ durch die Koeffizienten a_i dargestellt
-
- Transformation zwischen verschiedenen Signaldarstellungen (Basisfunktionensystemen) erfolgt über das Innenprodukt
 - Dabei ist eine Unterscheidung zweier Signalklassen nötig

3.1.1 Signalklassen

Definition: Energiesignale

- Energiesignale haben über einem unendlich großen Definitionsintervall $t \in [-\infty, \infty]$ eine endliche Signalenergie:

$$E_x = \int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 dt < \infty$$

- Norm und Innenprodukt: $E_x = \|x(t)\|^2 = \langle x(t), x(t) \rangle_t$

- Energiesignale müssen notwendigerweise abklingen, d.h.:

$$x(t) \rightarrow 0 \text{ für } t \rightarrow \pm\infty$$

- **Beispiel:** Impulsantwort eines stabilen LTI-Systems, z.B.:

$$x(t) = e^{-t^2/2}$$

$$E_x = \sqrt{\pi}$$

Definition: Leistungssignal

- Leistungssignale haben eine endlich große Signalleistung über dem Definitionsintervall $t \in [-\infty, \infty]$. Die Signalenergie ist unendlich groß.

- Signalleistung:
$$P_x = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} |x(t)|^2 dt < \infty$$

- Norm und Innenprodukt:
$$P_x = \|x(t)\|^2 = \langle x(t), x(t) \rangle_t$$

- Leistungssignale klingen nicht oder nicht schnell genug ab, um eine endliche Signalenergie zu besitzen
- Beispiel:** periodische Funktionen, z. B.:

$$x(t) = \sin(t)$$

$$E_x \rightarrow \infty$$

$$P_x = 1/2$$

3.8.1 Zeitdauer und Bandbreite von Energiesignalen

- Interpretation der normierten Energiedichte $\frac{|x(t)|^2}{\|x(t)\|^2}$ als verallgemeinerte Wahrscheinlichkeitsdichte
- „Mittelwerte“ und „Varianzen“ im Zeit- u. Frequenzbereich bedeutungsvoll

Definition: Mittlere Zeit, mittlere Frequenz, Zeitdauer und Bandbreite

- Die **mittlere Zeit** t_x und die **mittlere Frequenz** f_x sind die ersten Momente (Mittelwerte) der normierten Energiedichten:

$$t_x = \int_{-\infty}^{\infty} t \cdot \frac{|x(t)|^2}{\|x(t)\|^2} dt \quad f_x = \int_{-\infty}^{\infty} f \cdot \frac{|X(f)|^2}{\|X(f)\|^2} df$$

- Entsprechend sind die **Zeitdauer** Δ_t und die **Bandbreite** Δ_f über die zweiten zentralen Momente (Varianzen) der normierten Energiedichten definiert:

$$\Delta_t^2 = \int_{-\infty}^{\infty} (t - t_x)^2 \frac{|x(t)|^2}{\|x(t)\|^2} dt \quad \Delta_f^2 = \int_{-\infty}^{\infty} (f - f_x)^2 \frac{|X(f)|^2}{\|X(f)\|^2} df$$

Definition: Fensterfunktion

- Eine **Fensterfunktion** $w(t)$ ist ein reelles, symmetrisches, nicht-negatives Energiesignal, dessen Signalenergie überwiegend im Bereich der mittleren Zeit und der mittleren Frequenz lokalisiert ist. Man sagt: Das Fenster ist ein **kompaktes** Signal.
- Üblich: Normierung der Signalenergie auf $\|w(t)\|^2 = 1$.

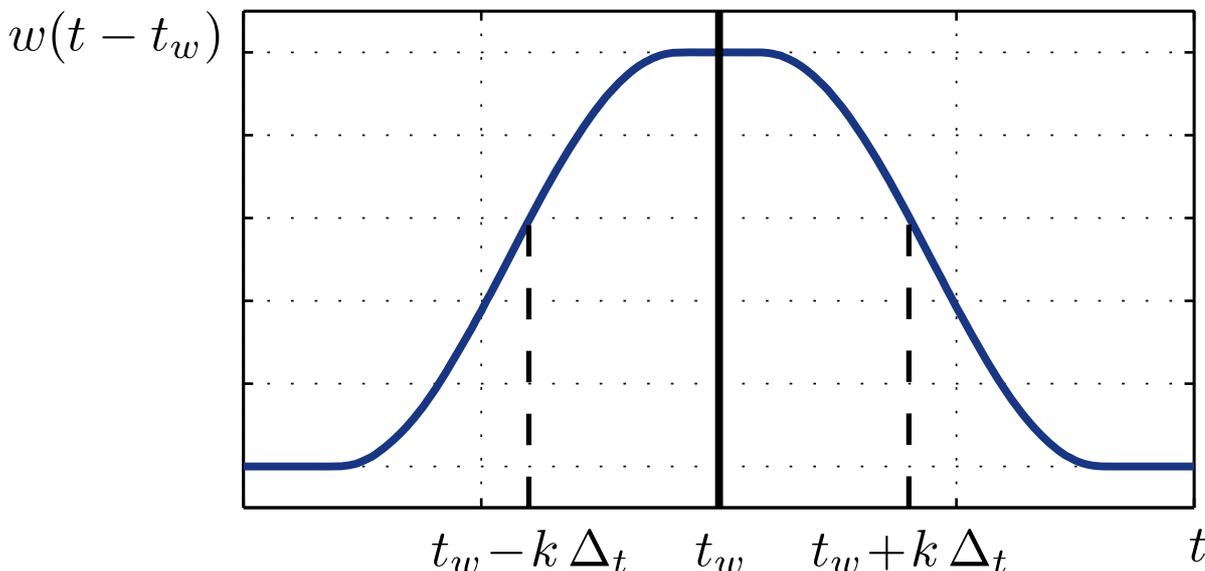
7.1.1 Verschiebungsinvarianz

- Definitionsgemäß besitzt eine (nichtverschobene) Fensterfunktion $w(t)$ die mittlere Zeit und die mittlere Frequenz null.
- Zur Zeit-Frequenz-Analyse wird das Fenster $w(t)$ um die Zeit t_w und die Frequenz f_w verschoben. Dadurch erhält man:

$$w(t - t_w) \exp(j2\pi f_w t) \circ \bullet W(f - f_w) \exp(-j2\pi(f - f_w)t_w)$$

- Die Zeitdauer Δ_t und Bandbreite Δ_f des Fensters sind unabhängig von der Verschiebung um t_w und f_w (**Verschiebungsinvarianz**).

Zeitlich verschobene Fensterfunktion



Leckeffekt

- Entsteht bei Fensterung des Signals $x(t)$:

$$x_w(t) = x(t) \cdot w(t - t_w) \exp(j2\pi f_w t)$$

- Ursprüngliches Spektrum $X(f)$ wird durch Fensterung verfälscht:

$$X_w(f) = X(f) * W(f - f_w) \exp(-j2\pi(f - f_w)t_w)$$

Diskussion

- Durch Fensterung des Signals $x(t)$ **wird die Zeitdauer kleiner**. Das Signal wird zeitlich kompakter („schärfer“).
- Durch den Leckeffekt wird das Spektrum „verschmiert“; die **Bandbreite wird größer**. Das Signal wird durch die Filterung bzgl. der Frequenz unschärfer.

Aufgabenstellung

- gleichzeitige Betrachtung eines Signals $x(t)$ in Zeit und Frequenz
- Mögliche Vorgehensweise: Fensterung des Signals mit einem in Zeit und Frequenz kompakten Fenster
- Annahme: t_w und f_w gleich null, da unabh. von Zeitdauer und Bandbreite
- Berechnung von $\Delta_t^2 \cdot \Delta_f^2$ signalabhängig
- Abschätzung mittels der Schwarz'schen Ungleichung liefert die:

Unschärferelation

- Es gilt:
$$\Delta_t \cdot \Delta_f \geq \frac{1}{4\pi}$$
- Zeitdauer und Bandbreite können **nicht gleichzeitig** beliebig klein gewählt werden

Aussage der Unschärferelation: Eine schmale Fensterfunktion (feine Zeitauflösung) besitzt ein breites Spektrum (grobe Frequenzauflösung). Das Umgekehrte gilt für ein breites Fenster.

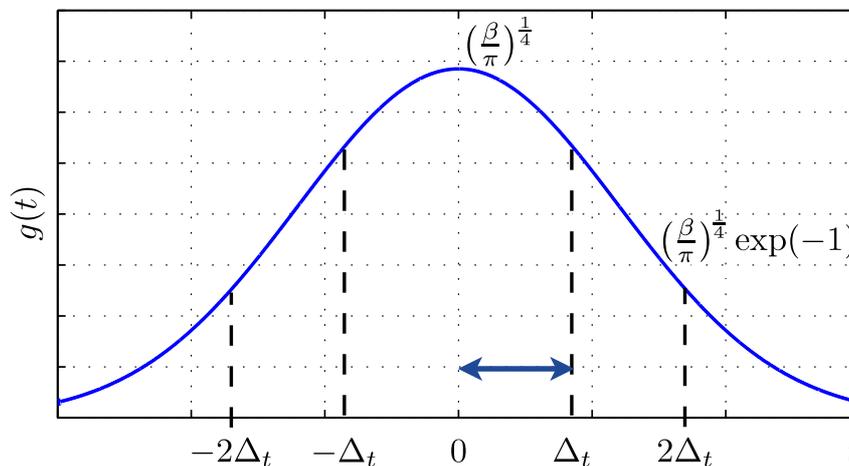
- **Frage:** Welche Funktion besitzt das kleinstmögliche Zeitdauer-Bandbreite-Produkt?
- Man kann zeigen, dass es sich um den **Gauß-Impuls** handelt:

$$g(t) = (\beta/\pi)^{1/4} \exp\left(-\frac{\beta}{2} t^2\right)$$

In der Unschärferelation gilt dann das Gleichheitszeichen.

- Dessen Zeitdauer-Bandbreite-Produkt ist demnach:

$$\Delta_t \cdot \Delta_f = \frac{1}{4\pi}$$



7.1.2 Effektive Zeitdauer und effektive Bandbreite

- Die Zeitdauer eines Signals (als 2. Zentralmoment) ist klein gegenüber dem Zeitintervall, in dem das Signal nennenswerte Amplituden aufweist
- **Alternativ:** Definition der **effektiven Zeitdauer**
- Fläche unter dem Betrag des Signals wird in flächengleiches Rechteck (bei gleicher maximaler Amplitude x_{\max}) umgeformt:

$$T_{\text{eff}} = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{|x(t)|}{x_{\max}} dt$$

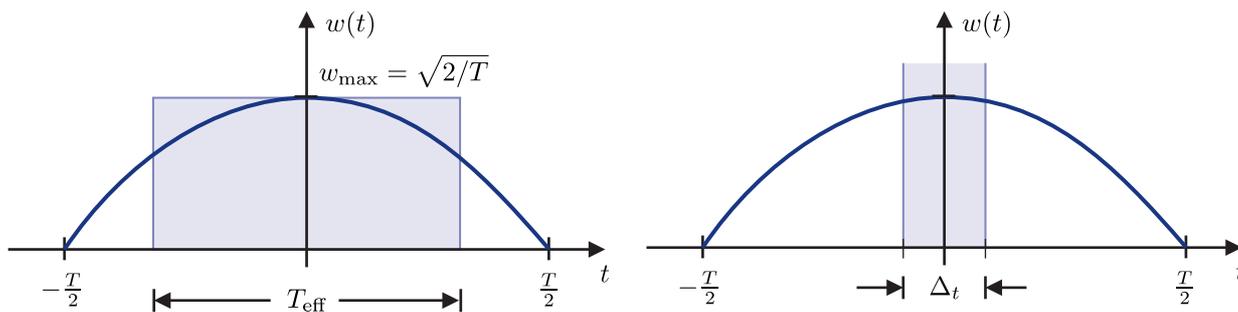
- Abschätzung, wann ein Signal **nennenswerte Energieanteile** aufweist
- Gute Wahl für die Zeitverschiebung von Fensterfunktionen zur Zeit-Frequenz-Analyse (z. B. Gabor-Reihe, s. Kapitel 2)
- Analog: **effektive Bandbreite:**

$$F_{\text{eff}} = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{|X(f)|}{X_{\max}} df$$

Beispiel: Cosinus-Halbwellen (Vorfaktor bewirkt Normierung auf Energie 1)

$$x(t) = \sqrt{\frac{2}{T}} \cos\left(\pi \frac{t}{T}\right) r_T(t)$$

$$T_{\text{eff}} = \int_{-T/2}^{T/2} \cos\left(\pi \frac{t}{T}\right) dt = \frac{2T}{\pi} \approx 0,637 \cdot T \quad \Delta_t \approx 0,181 \cdot T$$



7.2 Skalierung

Wavelet-Transformation basiert auf Skalierung der Fensterfunktionen (vgl. Kap. 3). Wie ändern sich die Signaleigenschaften durch Skalierung?

■ Skaliertes Signal: $y_a(t) = y\left(\frac{t}{a}\right), \quad a > 0$

■ Fourier-Transformierte: $Y_a(f) = a Y(af)$

■ Energieänderung: $E_{y,a} = a \cdot E_y$

■ Skaliertes Signal mit gleichbleibender Energie: $y_a(t) = \frac{1}{\sqrt{|a|}} y\left(\frac{t}{a}\right)$

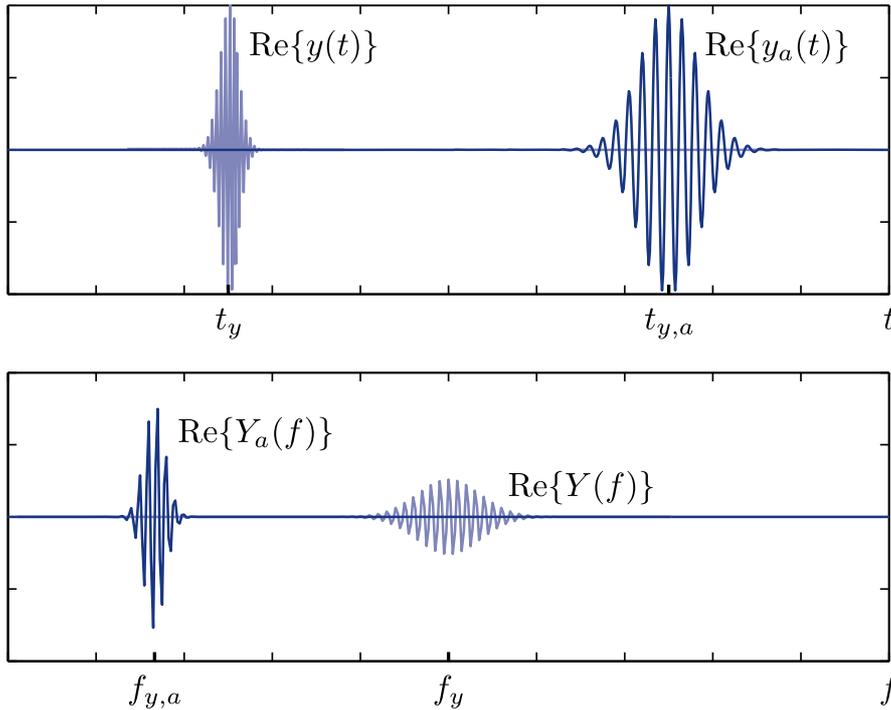
■ Mittlere Zeit: $t_{y,a} = a \cdot t_y$

■ Zeitdauer: $\Delta_{t,a} = a \Delta_t$

■ Mittlere Frequenz: $f_{y,a} = \frac{1}{a} \cdot f_y$

■ Bandbreite: $\Delta_{f,a} = \frac{1}{a} \Delta_f$

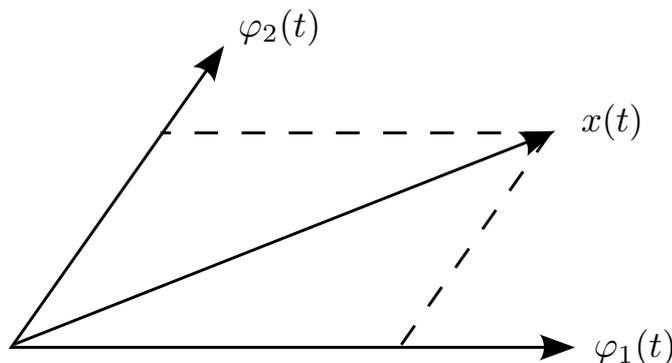
- Streckung in Zeit: Vergrößerung der mittleren Zeit und Zeitdauer, Verkleinerung der mittleren Frequenz und Bandbreite (Bsp.: $a = 3$)



7.3 Hilbert-Räume

7.3.1 Basisfunktionen

- Signale können als Funktionen oder Vektoren behandelt werden, die einen Funktionen- bzw. Vektorraum aufspannen
- Ein Element $x(t)$ dieses Vektorraums lässt sich als Linearkombination der **Basisfunktionen** $\varphi_i(t)$ darstellen: $x(t) = \sum_{i=-\infty}^{\infty} a_i \varphi_i(t)$



- **Hilbert-Raum**: Vollständiger Vektorraum mit definiertem **Innenprodukt** und **Norm** gemäß:

$$\|x(t)\| = \sqrt{\langle x(t), x(t) \rangle}$$

- Zur Berechnung der Koeffizienten a_i wird das Signal $x(t)$ auf die Basisfunktionen $\varphi_i(t), i = 1, \dots, n$ projiziert:

$$\langle x(t), \varphi_1(t) \rangle = a_1 \langle \varphi_1(t), \varphi_1(t) \rangle + a_2 \langle \varphi_2(t), \varphi_1(t) \rangle + \dots + a_n \langle \varphi_n(t), \varphi_1(t) \rangle$$

$$\langle x(t), \varphi_2(t) \rangle = a_1 \langle \varphi_1(t), \varphi_2(t) \rangle + a_2 \langle \varphi_2(t), \varphi_2(t) \rangle + \dots + a_n \langle \varphi_n(t), \varphi_2(t) \rangle$$

$$\vdots$$

$$\langle x(t), \varphi_n(t) \rangle = a_1 \langle \varphi_1(t), \varphi_n(t) \rangle + a_2 \langle \varphi_2(t), \varphi_n(t) \rangle + \dots + a_n \langle \varphi_n(t), \varphi_n(t) \rangle$$

- In Matrix-Notation:

$$\begin{bmatrix} \langle x(t), \varphi_1(t) \rangle \\ \langle x(t), \varphi_2(t) \rangle \\ \vdots \\ \langle x(t), \varphi_n(t) \rangle \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} \langle \varphi_1(t), \varphi_1(t) \rangle & \langle \varphi_2(t), \varphi_1(t) \rangle & \dots & \langle \varphi_n(t), \varphi_1(t) \rangle \\ \langle \varphi_1(t), \varphi_2(t) \rangle & \langle \varphi_2(t), \varphi_2(t) \rangle & \dots & \langle \varphi_n(t), \varphi_2(t) \rangle \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \langle \varphi_1(t), \varphi_n(t) \rangle & \langle \varphi_2(t), \varphi_n(t) \rangle & \dots & \langle \varphi_n(t), \varphi_n(t) \rangle \end{bmatrix}}_{\mathbf{G} \text{ (Gram'sche Matrix)}} \underbrace{\begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix}}_{\mathbf{a}}$$

- Daraus folgt für die Koeffizienten:

$$\mathbf{a} = \mathbf{G}^{-1} \cdot \begin{bmatrix} \langle x(t), \varphi_1(t) \rangle \\ \langle x(t), \varphi_2(t) \rangle \\ \vdots \\ \langle x(t), \varphi_n(t) \rangle \end{bmatrix}$$

Diskussion

- Koeffizienten a_i eindeutig, wenn Gram'sche Matrix regulär
- Basis** \Leftrightarrow Basisfunktionen sind **linear unabhängig**
 - Keine Basisfunktion „zu viel“, keine Redundanz
 - Falls Gram'sche Matrix invertierbar \Rightarrow Koeffizienten a_i eindeutig bestimmbar
- Alternativ können Signale mittels **Frames** dargestellt werden

Beispiel 7.11: Zeitverschobene Gauß-Impulse als Basisfunktionen

$$\varphi_m(t) = \left(\frac{\beta}{\pi}\right)^{\frac{1}{4}} \exp\left(-\frac{\beta}{2}(t - mT)^2\right)$$

- Impulse mit verschiedenen Verschiebungen m **nicht** orthogonal [PJ15]:

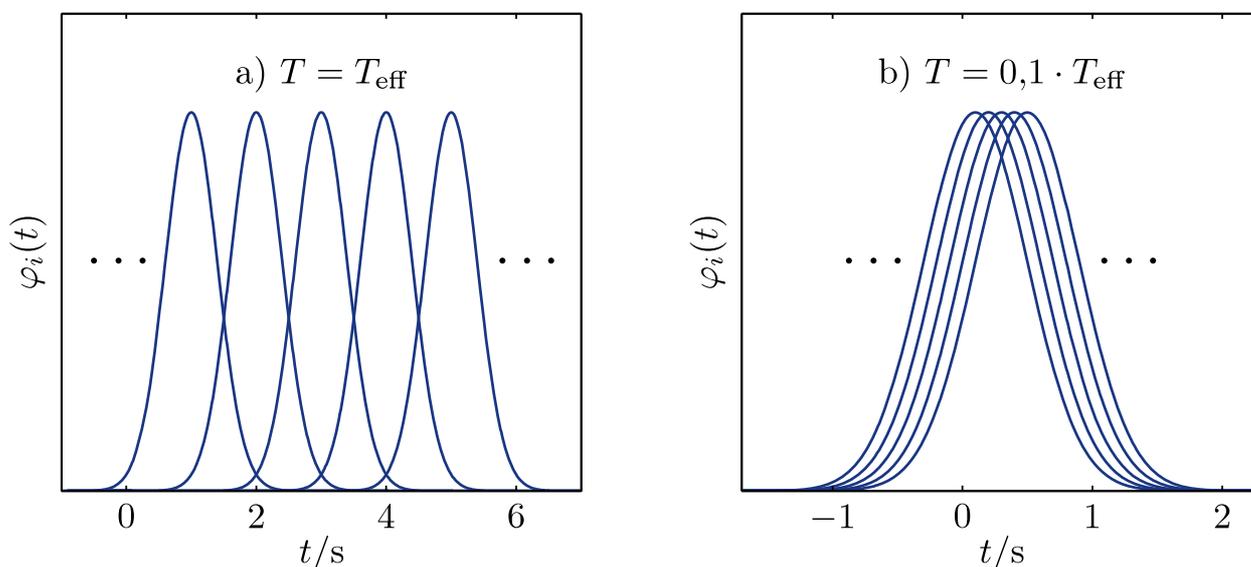
$$\langle \varphi_m(t), \varphi_{m+\Delta m}(t) \rangle \neq 0$$

- Zeitverschobene Gauß-Impulse bilden eine **Basis**, da ein bestimmter Impuls nicht durch Linearkombination der übrigen Impulse darstellbar ist (**Redundanzfreiheit**) [PJ15]:

$$\hat{\varphi}_m(t) = \sum_{\substack{\Delta m = -\infty \\ \Delta m \neq 0}}^{\infty} c_{\Delta m} \cdot \varphi_{m+\Delta m}(t) \neq \varphi_m(t)$$

- Im Folgenden Annäherung von $\varphi_0(t)$ durch Linearkombination verschobener Gauß-Impulse (dabei Begrenzung auf 10 Basisfunktionen, um die Gram'sche Matrix darstellen zu können)

Gauß-Impulse als Basisfunktionen für verschiedene Zeitverschiebungen T



a) Gram'sche Matrix für $T = T_{\text{eff}}$:

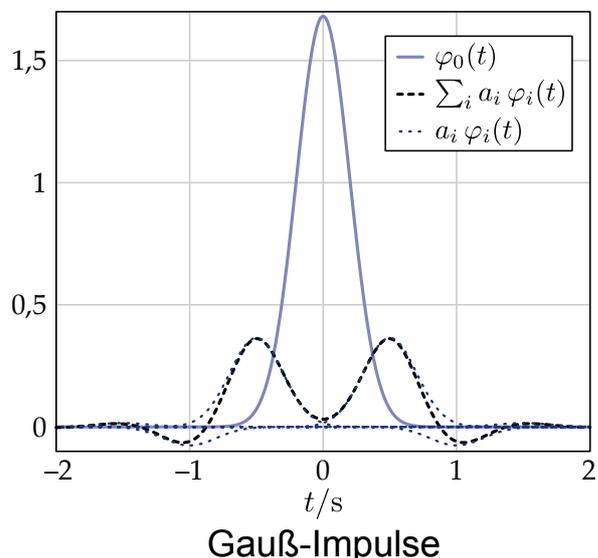
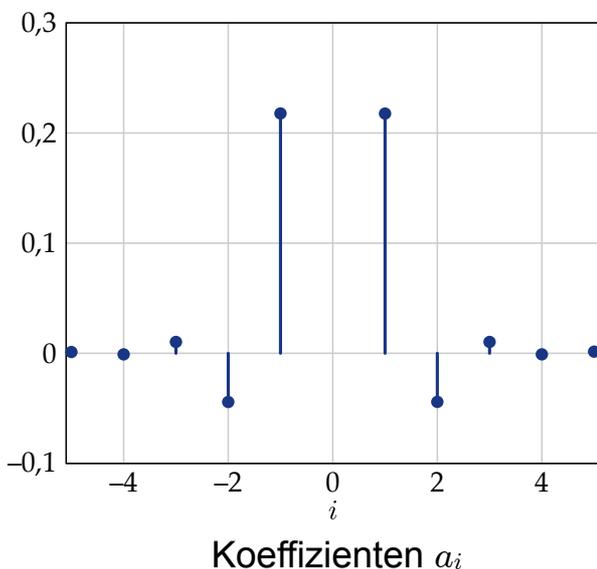
$$G = \begin{bmatrix} 1 & 0,21 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0,21 & 1 & 0,21 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0,21 & 1 & 0,21 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0,21 & 1 & 0,21 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0,21 & 1 & 0,21 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0,21 & 1 & 0,21 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0,21 & 1 & 0,21 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0,21 & 1 & 0,21 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0,21 & 1 & 0,21 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0,21 & 1 \end{bmatrix}$$

b) Gram'sche Matrix für $T = 0,1 \cdot T_{\text{eff}} \rightarrow$ schlecht konditioniert:

$$G = \begin{bmatrix} 1 & 0,98 & 0,94 & 0,87 & 0,78 & 0,57 & 0,46 & 0,37 & 0,28 & 0,21 \\ 0,98 & 1 & 0,98 & 0,94 & 0,87 & 0,78 & 0,57 & 0,46 & 0,37 & 0,28 \\ 0,94 & 0,98 & 1 & 0,98 & 0,94 & 0,87 & 0,78 & 0,57 & 0,46 & 0,37 \\ 0,87 & 0,94 & 0,98 & 1 & 0,98 & 0,94 & 0,87 & 0,78 & 0,57 & 0,46 \\ 0,78 & 0,87 & 0,94 & 0,98 & 1 & 0,98 & 0,94 & 0,87 & 0,78 & 0,57 \\ 0,57 & 0,78 & 0,87 & 0,94 & 0,98 & 1 & 0,98 & 0,94 & 0,87 & 0,78 \\ 0,46 & 0,57 & 0,78 & 0,87 & 0,94 & 0,98 & 1 & 0,98 & 0,94 & 0,87 \\ 0,37 & 0,46 & 0,57 & 0,78 & 0,87 & 0,94 & 0,98 & 1 & 0,98 & 0,94 \\ 0,28 & 0,37 & 0,46 & 0,57 & 0,78 & 0,87 & 0,94 & 0,98 & 1 & 0,98 \\ 0,21 & 0,28 & 0,37 & 0,46 & 0,57 & 0,78 & 0,87 & 0,94 & 0,98 & 1 \end{bmatrix}$$

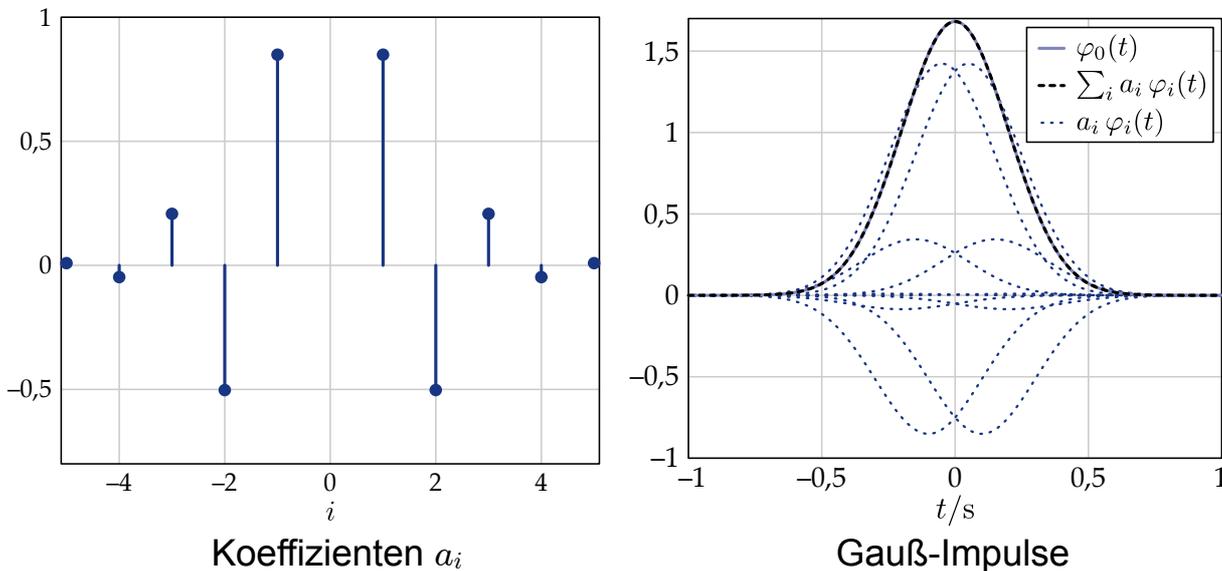
■ Berechnung der Koeffizienten a_i durch Invertierung der Gram'schen Matrix

1. Fall: Annäherung von φ_0 durch $\sum_i a_i \varphi_i$ mit $\frac{T}{T_{\text{eff}}} = 1$: Die Approximation der Funktion φ_0 gelingt nicht.



■ Verminderung der Schrittweite

2. Fall: Annäherung von φ_0 durch $\sum_i a_i \varphi_i$ mit $\frac{T}{T_{\text{eff}}} = 0,1$: Die Funktion φ_0 und ihre Approximation sind in der Darstellung nicht mehr unterscheidbar.



Diskussion

- Um den Gauß-Impuls $\varphi_0(t)$ besser anzunähern, wurde die Zeitverschiebung T der Gauß-Impulse $\varphi_i(t)$ stark verkleinert.
- Bei sehr kleinen Zeitverschiebungen $T \leq 0,1 T_{\text{eff}}$ überlappen sich die Basisfunktionen stark. Damit ist das System der Basisfunktionen stärker überbestimmt.
- Mit kleiner werdendem T gehen allerdings die Elemente der Gram'schen Matrix gegen 1, so dass diese schlecht konditioniert ist und nicht mehr invertiert werden kann.
- Will man deshalb den Funktionenraum mit einem stark überbestimmten Funktionensystem aufspannen, so wählt man anstelle von Basen **Frames**, bei denen die Koeffizienten durch Projektion ohne Invertierung der Gram'schen Matrix berechnet werden (vgl. Abschnitt 7.3.4).

Beispiel 7.12: Annäherung der Funktion $x(t) = t^2$ durch ein Basissystem zeitverschobener Gauß-Impulse

- Approximation auf endlichem Intervall, da $x(t)$ kein Energiesignal
- Verwendung von $2N + 1$ Gauß-Impulsen, um a_i zu berechnen:

$$\varphi_i(t) = \left(\frac{2}{T_{\text{eff}}^2}\right)^{\frac{1}{4}} \exp\left(-\frac{\pi}{T_{\text{eff}}^2} (t - iT)^2\right), \quad T_{\text{eff}} = \sqrt{\frac{2\pi}{\beta}}$$

$$x(t) \approx \sum_{i=-N}^N a_i \varphi_i(t)$$

■ Gram'sche Matrix: $\mathbf{G} = [\langle \varphi_i, \varphi_j \rangle]_{i,j} = \left[\exp\left(-\frac{\pi}{2} \frac{T^2}{T_{\text{eff}}^2} (i - j)^2\right) \right]_{i,j}$

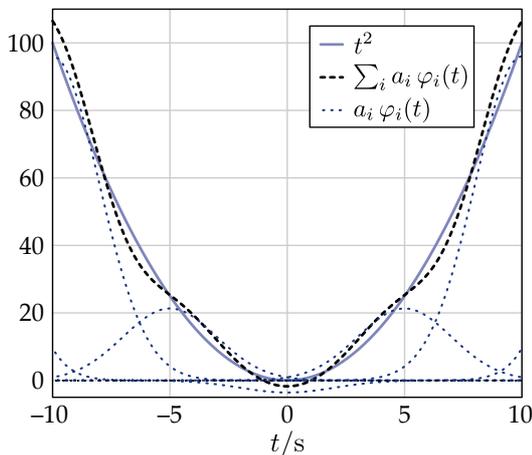
■ Projektionen:

$$\begin{aligned} \langle x(t), \varphi_i(t) \rangle &= \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{2}{T_{\text{eff}}^2}\right)^{\frac{1}{4}} \exp\left(-\frac{\pi}{T_{\text{eff}}^2} (t - iT)^2\right) \cdot t^2 dt \\ &= \dots = 2^{-\frac{3}{4}} \cdot T_{\text{eff}}^{\frac{5}{2}} \cdot \pi^{-1} + (iT)^2 \cdot 2^{\frac{1}{4}} \cdot T_{\text{eff}}^{\frac{1}{2}} \end{aligned}$$

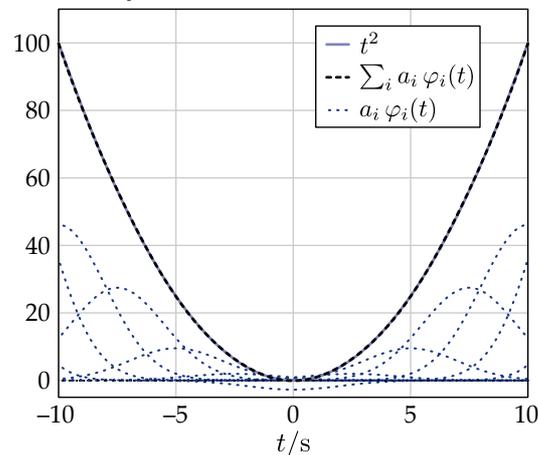
■ Koeffizienten:

$$\mathbf{a} = \mathbf{G}^{-1} \cdot \begin{bmatrix} \langle x(t), \varphi_1(t) \rangle \\ \langle x(t), \varphi_2(t) \rangle \\ \vdots \\ \langle x(t), \varphi_N(t) \rangle \end{bmatrix}$$

Annäherung von t^2 durch $\sum_i a_i \varphi_i$



$T/T_{\text{eff}} = 1$



$T/T_{\text{eff}} = 0,5$

Diskussion

- Auch hier wird die Annäherung der Funktion durch die Gauß-Impulse mit kleinerer Zeitverschiebung T besser
- Der Quotient T/T_{eff} lässt sich jedoch nicht beliebig verkleinern:
 - Für $T/T_{\text{eff}} \rightarrow 0$ gehen die Elemente der Gram'schen Matrix gegen 1 (vgl. Beispiel 7.11)
 - Die Matrix ist dann schlecht konditioniert, d. h. ihre Determinante liegt nahe bei null, was zu numerischen Problemen führt
- Gauß-Impulse sind daher als Basisfunktionen zur Darstellung des Signals t^2 nicht in jedem Fall geeignet



7.3.2 Orthonormalität

Definition: Orthonormale Basis

- Eine orthonormale Basis $\{\varphi_i(t), i = 1, \dots, n\}$ erfüllt die Bedingung

$$\langle \varphi_i(t), \varphi_j(t) \rangle = \delta_{ij}$$

- Die Gram'sche Matrix wird bei orthonormalen Basen zur Einheitsmatrix
- Die Koeffizienten erhält man einfach durch Projektion des Signals auf die Basisfunktionen:

$$a_i = \langle x(t), \varphi_i(t) \rangle, \quad i = 1, \dots, n$$

- In **orthonormalen** Basissystemen gilt **Energieerhaltung** (Signalenergie = Koeffizientenenergie; „Satz von Parseval“):

$$\|x(t)\|^2 = \langle x(t), x(t) \rangle = \sum_{i=-\infty}^{\infty} |a_i|^2$$

Bei nur **orthogonalen** Basen gilt diese Eigenschaft nicht

Definition: Biorthonormalität

- Zwei Funktionensysteme $\{\varphi_i(t), i = 1, \dots, n\}$ und $\{\tilde{\varphi}_i(t), i = 1, \dots, n\}$ heißen **biorthonormal**, wenn sie die folgende Bedingung erfüllen:

$$\langle \varphi_i(t), \tilde{\varphi}_j(t) \rangle = \delta_{ij}$$

- Die Koeffizienten der Reihenentwicklung von $x(t)$ in das Funktionensystem $\{\varphi_i(t)\}$ folgen durch Multiplikation von

$$x(t) = a_1 \varphi_1(t) + \dots + a_N \varphi_N(t)$$

von rechts mit $\tilde{\varphi}_i(t)$ zu

$$a_i = \langle x(t), \tilde{\varphi}_i(t) \rangle.$$

- Die einzelnen Funktionensysteme $\{\varphi_i(t)\}$ und $\{\tilde{\varphi}_i(t)\}$ müssen für sich alleine weder orthogonal noch Basissysteme sein.

7.3.3 Biorthonormalität

Beispiel

- Die Basis $\{\varphi_1, \varphi_2\}$ mit

$$\varphi_1 = (1, 0)^T \quad \text{und} \quad \varphi_2 = (\sqrt{2}/2, \sqrt{2}/2)^T$$

ist offensichtlich nicht orthonormal. Gemeinsam mit der dazu biorthonormalen Basis $\{\tilde{\varphi}_1, \tilde{\varphi}_2\}$ mit

$$\tilde{\varphi}_1 = (1, -1)^T \quad \text{und} \quad \tilde{\varphi}_2 = (0, \sqrt{2})^T$$

kann dennoch ein beliebiger Vektor \mathbf{x} aus dessen Projektionen

$$a_1 = \langle \mathbf{x}, \varphi_1 \rangle \quad \text{sowie} \quad a_2 = \langle \mathbf{x}, \varphi_2 \rangle$$

wie folgt rekonstruiert werden:

$$\mathbf{x} = a_1 \tilde{\varphi}_1 + a_2 \tilde{\varphi}_2$$

- Beide Funktionensysteme sind **vertauschbar**

- **Erinnerung:** Funktionensystem einer Basis enthält keine Redundanz. Die Darstellung eines Signals in einer Basis ist eindeutig.
- Bei stark redundanten Basen verschlechtert sich die Kondition von G .
- Alternativ kann man Funktionenräume mit einem **Frame** aufspannen.

Definition: Frame

- Ein **Frame** ist ein Funktionensystem $\{\varphi_i(t)\}$, welches einen Hilbert-Raum aufspannt. Die Frame-Koeffizienten a_i werden durch Projektion berechnet:

$$a_i = \langle x(t), \varphi_i(t) \rangle$$

- Die Projektion eines *beliebigen* Signals $x(t)$ mit endlicher, von null verschiedener Signalenergie auf die Frame-Funktionen ergibt Koeffizienten mit endlicher, von null verschiedener **Energie:**

$$0 < A \cdot \|x(t)\|^2 \leq \sum_{i=-\infty}^{\infty} |a_i|^2 \leq B \cdot \|x(t)\|^2 < \infty$$

A und B werden **Frame-Grenzen** der Koeffizientenenergie genannt.

Diskussion

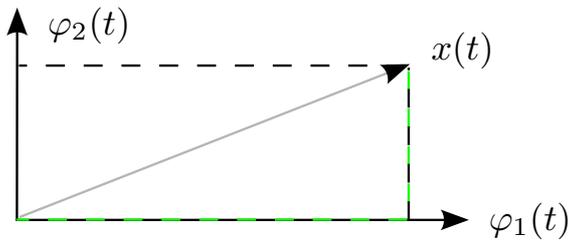
- Eine Basis ist ein Spezialfall eines Frames. Ein Frame kann dagegen als eine „überevullständige Basis“ aufgefasst werden.
- Die Frame-Funktionen können im Allgemeinen linear abhängig sein, also Redundanz enthalten.

Die Koeffizienten a_i sind dann allerdings weder optimal noch eindeutig.

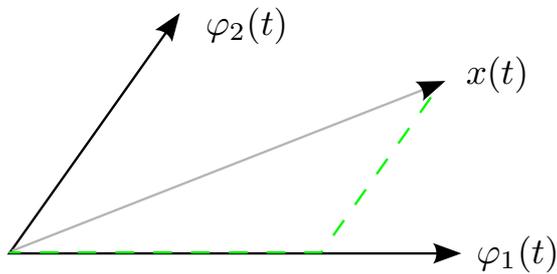
- Für eine sinnvolle Analyse des Signals $x(t)$ ist deshalb zumindest eine Beschränkung der Koeffizientenenergie des Frames erforderlich.
- Für die Frame-Grenzen A und B gilt:

$$0 < A \leq B < \infty$$

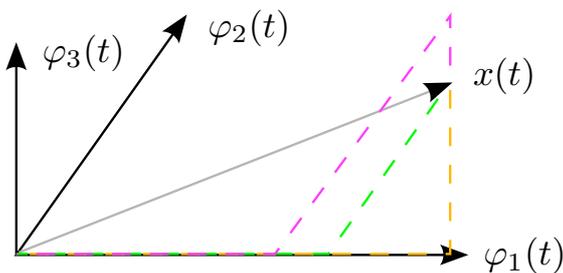
- Je näher die Frame-Grenzen A und B zusammenliegen, desto besser repräsentieren die Koeffizienten a_i die anteilige Energie des Signals $x(t)$ bezüglich der Funktionen $\varphi_i(t)$.

**Orthogonale Basis**

- Koeffizienten durch Projektion
- Eindeutige Rekonstruktion

**Nicht-orthogonale Basis**

- Invertierung der Gram'schen Matrix
- Eindeutige Rekonstruktion

**Redundanter Frame**

- Koeffizienten durch Projektion
- Rekonstruktion nicht eindeutig

Definition: Duale Frames

- Die beiden Folgen von Funktionen $\{\varphi_i(t)\}$ und $\{\tilde{\varphi}_i(t)\}$ bilden jeweils für sich einen Frame. Ferner seien sie über die Biorthonormalitätsbedingung

$$\langle \varphi_i(t), \tilde{\varphi}_j(t) \rangle = \delta_{ij}$$

miteinander verbunden.

- Wenn die Koeffizienten der Reihenentwicklung eines Signals $x(t)$ in die Funktionen $\varphi_i(t)$ und $\tilde{\varphi}_i(t)$ gemäß

$$a_i = \langle x(t), \tilde{\varphi}_i(t) \rangle \quad \text{bzw.} \quad \tilde{a}_i = \langle x(t), \varphi_i(t) \rangle$$

bestimmt werden, dann heißen die beiden Funktionensysteme $\varphi_i(t)$ und $\tilde{\varphi}_i(t)$ **duale Frames**.

- Anwendung: Signalanalyse mit Frame $\varphi_i(t)$, Rekonstruktion mit dualem Frame $\tilde{\varphi}_i(t)$

Definition: Straffer Frame (Tight Frame)

- Sind beide Frame-Grenzen identisch,

$$A = B,$$

so bilden die Frame-Funktionen $\varphi_i(t)$ einen **straffen Frame**. Die Koeffizientenenergie ist proportional zur Signalenergie:

$$\|x(t)\|^2 = \frac{1}{A} \sum_{i=-\infty}^{\infty} \underbrace{|\langle x(t), \varphi_i(t) \rangle|^2}_{|a_i|^2}.$$

- Frames sind die überbestimmte Variante einer Basis, straffe Frames die überbestimmte Variante einer orthogonalen Basis (nicht orthogonal!):
 - Für $A = 1$ geht der straffe Frame in eine **orthonormale Basis** über.
 - Für $A \neq 1$ sind die Frame-Funktionen **nicht orthogonal**.

- **Reihenentwicklung** von $x(t)$ in einen straffen Frame [PJ15]:

$$x(t) = \frac{1}{A} \sum_{i=-\infty}^{\infty} \underbrace{\langle x(t), \varphi_i(t) \rangle}_{a_i} \varphi_i(t)$$

Beispiel 7.30: Sinc-Funktionen als straffer Frame bei Überabtastung

- Ein bandbegrenzte Signal (Grenzfrequenz f_G) wird mit der Frequenz f_A überabgetastet. Die zur Rekonstruktion verwendeten Sinc-Funktionen bilden **bei Überabtastung** keine orthogonale Basis, wie bei exakter Einhaltung des Abtasttheorems, sondern einen **straffen Frame**.
- Rekonstruktionsfilter bei exakter Einhaltung des Abtasttheorems:

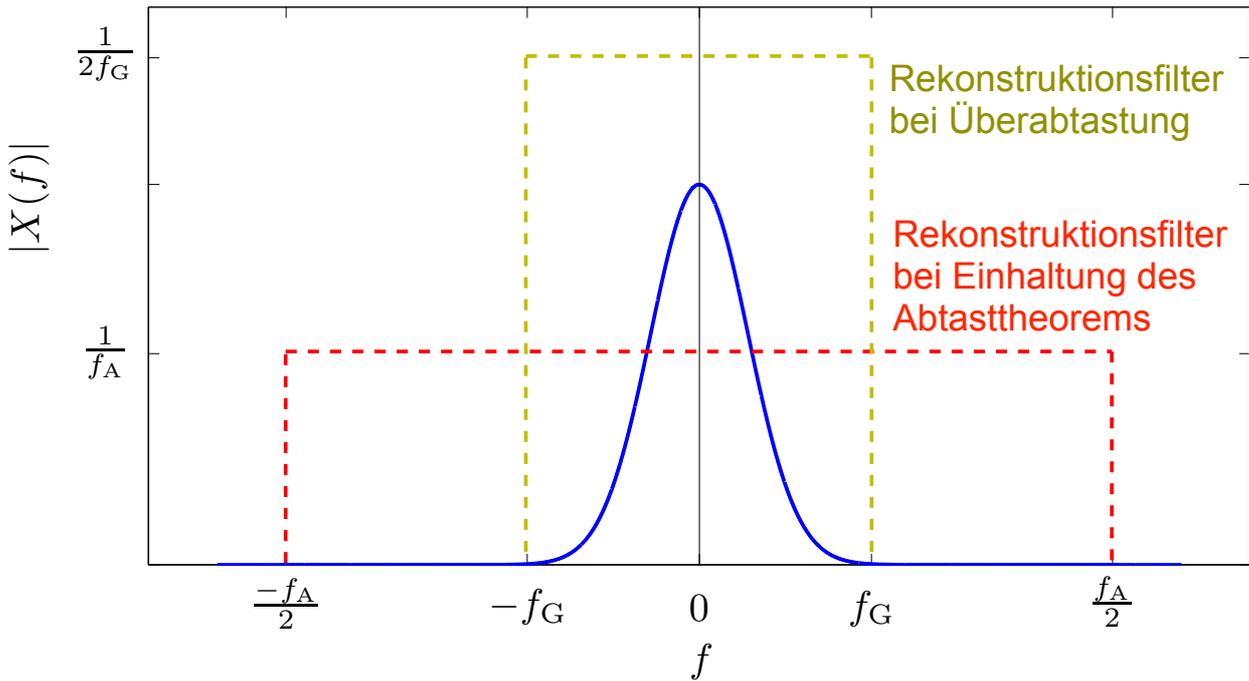
$$\varphi_m(t) = \text{sinc}(\pi f_A(t - mt_A)) \quad \circ \bullet \quad \Phi_m(f) = \frac{1}{f_A} R_{f_A}(f) \exp(-j2\pi f m t_A)$$

- Rekonstruktion bei Überabtastung \rightarrow schmaleres Filter der Breite $2f_G$:

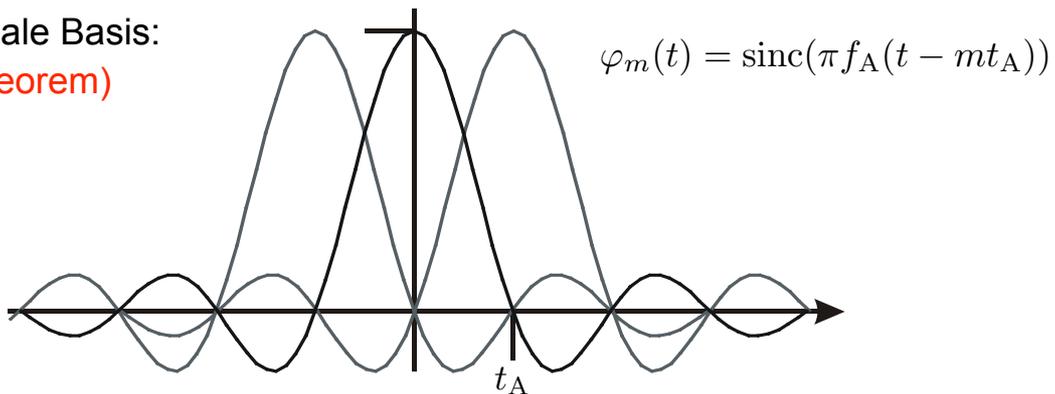
$$\varphi_m(t) = \text{sinc}(2\pi f_G(t - mt_A)) \quad \circ \bullet \quad \Phi_m(f) = \frac{1}{2f_G} R_{2f_G}(f) \exp(-j2\pi f m t_A)$$

- Die Koeffizienten a_i der Reihenentwicklung werden als Projektion des zu rekonstruierenden Signals $x(t)$ auf die Sinc-Funktionen berechnet, ohne Invertierung der Gram'schen Matrix.
- Die Bedingung $A = B$ für den straffen Frame ist erfüllt [PJ15].

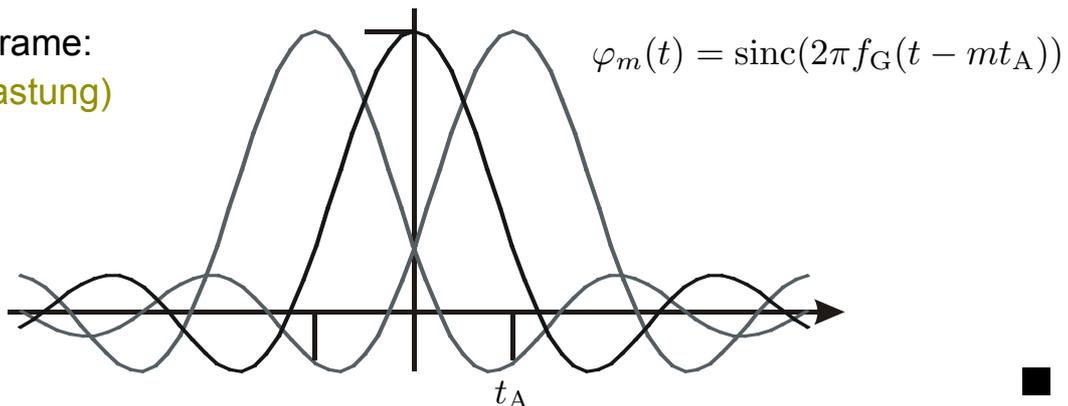
Rekonstruktion eines Signals im Frequenzbereich durch Multiplikation der Fourier-Transformierten mit einem Rechteckfilter der Fläche 1



Orthogonale Basis:
(Abtasttheorem)



Straffer Frame:
(Überabtastung)



7.3.6 Frames mit verschobenen Fensterfunktionen

- Ein Frame werde durch **zeit-** und **frequenz-**verschobene Fenster gebildet:

$$w_{mk}(t) = w(t - mT) \exp(j2\pi kFt)$$

- Die Energie des Fensters $w_{mk}(t)$ sei um die Zeit mT und um die Frequenz kF konzentriert.
- Die Koeffizienten a_{mk} werden als Projektion von $x(t)$ auf die verschobenen Fenster $w_{mk}(t)$ berechnet:

$$a_{mk} = \langle x(t), w_{mk}(t) \rangle$$

- Die Reihenentwicklung des Signals $x(t)$ lautet damit:

$$x(t) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_{mk} w_{mk}(t)$$

- Die Koeffizienten a_{mk} geben näherungsweise die anteilige Energie des zu analysierenden Signals im Bereich der mittleren Zeit mT und der mittleren Frequenz kF wieder.

7.3.6 Frames mit verschobenen Fensterfunktionen

- Dazu muss die Energie der Fensterfunktion um die mittlere Zeit und die mittlere Frequenz lokalisiert sein, d. h. die Fensterfunktion muss **kompakt** sein.
- Die Variablen Zeit und Frequenz spannen eine zweidimensionale Ebene auf: die **Zeit-Frequenz-Ebene**.
- Die **Verschiebungen** T und F müssen **klein genug** sein, um „Löcher“ in der Zeit-Frequenz-Ebene zu vermeiden. Ein guter Ansatz ist:

$$T \leq T_{\text{eff}}, \quad F \leq F_{\text{eff}}$$

- Der Gauß-Impuls hat das kleinste Zeitdauer-Bandbreite-Produkt:

$$T_{\text{eff}} \cdot F_{\text{eff}} = 1$$

- Daher wird allgemein gefordert: $T \cdot F \leq T_{\text{krit}} \cdot F_{\text{krit}} = 1$

- Der Kehrwert davon ist die **Überabtastrate** ($\alpha = 1$: „Kritische Abtastung“):

$$\alpha = \frac{1}{T \cdot F} \geq \frac{1}{T_{\text{krit}} \cdot F_{\text{krit}}} = 1$$

- Kompakte Fensterfunktionen wurden bereits in Abschnitt 7.1 behandelt.
- Folgende Definition präzisiert den Begriff der **Kompaktheit für Frames**:

Definition: Kompakte Frame-Funktionen

- Ein Frame werde aus zeit- und frequenzverschobenen Fensterfunktionen erzeugt. Dabei seien die Zeit- und Frequenzverschiebungen größer oder gleich den kritischen Verschiebungen

$$T \geq T_{\text{krit}} , \quad F \geq F_{\text{krit}} .$$

- Das Fenster $w(t)$ ist kompakt, wenn die Summe der Innenproduktbeträge

$$\sum_{\Delta m=-\infty}^{\infty} \sum_{\Delta k=-\infty}^{\infty} |\langle w(t), w(t - \Delta m T) e^{j2\pi \Delta k F t} \rangle| \leq S(w(t)) < \infty$$

bei orthonormalen Basen $\rightarrow \delta_{\Delta m} \delta_{\Delta k}$

kleiner als eine obere Schranke $S(w(t))$ ist. Diese hängt von der Kurvenform des Fensters ab.

Überlappungsgebiete bei verschiedenen Zeit- und Frequenzverschiebungen

Überlappungsgebiete zeitverschobener Fenster:
Innenprodukt ungleich null

Innenprodukt für die Verschiebung null:
Innenprodukt gleich eins

